2009년 7월 TA 자격시험: 미적분학

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오(총점 200점).

1 (각각 5점씩, 총15점). 다음 급수가 수렴하는지를 판정하시오.

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}(n^2-10)\sin\frac{1}{n^3} \qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{\log n}{n} \qquad (3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^2}$$

2 ((1)5점, (2)15점). (1) 다음 멱급수가 수렴하는 x 의 범위를 구하시오.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(n+1)}{n(2n+1)}\,x^{2n}$$

(2) $\log(1+x)$ 와 $\arctan x$ 의 멱급수 전개를 이용하여 다음 무한급수의 합을 구하시오.
(Hint : $\frac{n+1}{n(2n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n+1}$)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(n+1)}{n(2n+1)}\,\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

3 ((1)5점, (2)10점). (1) $f(x)=\arcsin x$ 의 3차 테일러 다항식을 구하시오.

(2) $0\le x\le\frac{1}{6}$ 이면 $|f^{(4)}(x)|\le 2$ 임을 이용하여 다음 적분의 근사값을 오차가 $\frac{1}{10000}$ 을 넘지 않도록 구하시오.

$$\int_0^{\frac{1}{6}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

4 (20점). 평면 $P:\ \{(a,b,c)+t(1,-1,1)+s(1,1,0)\mid t,s\in\mathbf{R}\}$ 와 직선 $L:\ \frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{2}$ 에 대하여, $\mathbf{R}^3$ 의 두변환 f 와 g 를 다음과 같이 정의한다.

$f(X)=X$ 를 평면 P 에 내린 수선의 발, $\qquad g(X)=X$ 를 직선 L 에 내린 수선의 발

$g\circ f$ 가 선형사상이 되도록 하는 a,b,c 의 관계식을 구하시오.

5 ((1)15점, (2)15점). (1) 구면좌표계에서

$$\rho=1,\quad \theta=2\varphi,\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$$

로 주어진 곡선의 밀도함수가 $\mu(\varphi)=\cos\varphi$ 로 주어졌을때, 이곡선의 질량을 구하시오.

(2) 곡선 $X(t)=(\cos(t^2-t),\ \sin(t^2-t),\ \frac{4}{3}\sqrt{2}\,t^{\frac{3}{2}})$, $0\le t\le 2\pi$ 를 호의 길이 s 로 재매개화 하고, 재매개화한 곡선의 $s=2$ 에서 속도벡터를 구하시오.

6 ((1)5점, (2)10점).

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^4}} & \text{if } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{if } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(1) f 의 $(0,0)$ 에서 연속성을 판정하시오.
(2) f 의 $(0,0)$ 에서 미분가능성을 판정하시오.

7 ((1)5점, (2)15점). (1) $f(x,y,z)=e^x\sin(y^2+z)$ 의 $(0,0,0)$ 에서 2차 근사다항식을 구하시오.

(2) $xy+yz=1$ 일때, $x^2+2y^2+z^2$ 의 최소값이 존재함을 보이고, 그 최소값을 구하시오.

8 ((1)10점, (2)15점). (1) 다음 영역의 부피를 구하시오.

$$y\ge 0,\quad x^2-x+y^2\le\sqrt{x^2+y^2},\quad 0\le z\le 4-\sqrt{x^2+y^2}$$

(2) 곡선 $X(t)=(t\cos t,\ t\sin t,\ t)$, $\pi\le t\le 3\pi$ 와 두벡터장

$$\mathbf{F}(x,y,z)=\left(\frac{-y}{x^2+y^2},\ \frac{x}{x^2+y^2},\ 0\right),\qquad \mathbf{G}(x,y,z)=\left(2xe^{x^2}\sin(yz^3),\ z^3e^{x^2}\cos(yz^3),\ 3yz^2e^{x^2}\cos(yz^3)\right)$$

에 대하여 $\int_X\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ 와 $\int_X\mathbf{G}\cdot d\mathbf{s}$ 를 구하시오.

9 (각각 10점씩, 총20점). (1) $\int_{\partial D}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ 를 구하시오.

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0\},\quad \mathbf{F}(x,y)=\left(3x^2y\cos(x^3+y^3)-y,\ \sin(x^3+y^3)+3y^3\cos(x^3+y^3)\right)$$

(2) $\iint_{\partial R}\mathbf{G}\cdot d\mathbf{S}$ 를 구하시오.

$$R=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le 1,\ y\ge 0,\ z\ge 0\},\quad \mathbf{G}(x,y,z)=\left(yze^{x^2+y^2+z^2},\ -xze^{x^2+y^2+z^2},\ x^2+y^2+z^2\right)$$

10 (20점). $\mathbf{R}^3$ 의 곡면 S 와 벡터장 $\mathbf{H}$ 가 다음과 같이 주어져 있을 때, $\iint_S \operatorname{curl}\mathbf{H}\cdot d\mathbf{S}$ 를 구하시오. 단, S 의 향을 정하는 단위벡터 $\mathbf{n}$ 은 $(1,0,0)$ 에서 $\mathbf{n}=(1,0,0)$ 이다.

$$S:\ x^2+y^2=z^2+1,\quad -\sqrt{3}\le z\le\sqrt{3},\qquad \mathbf{H}(x,y,z)=\left(yz,\ xy,\ (z^2-3)e^{xy}\right)$$