2011년 7월 TA 자격시험: 미적분학

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오(총점 200점).

1 (각각 5점씩, 총15점) 다음 급수가 수렴하는지를 판정하시오.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\log n}{n^2}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+2011n}{n^3+1}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\log n - n}$

2 (25점) 다음 무한급수의 값을 구하시오.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3n+1}\left(-\frac{1}{2}\right)^{3n+1}$$

3 (20점) 함수 $f(x) = \log(2x - x^2)$ 의 $x = 1$ 에서 테일러 급수를 구하고, 이 테일러 급수가 $x = \frac{1}{2}$ 에서 수렴하면 그 값을 구하시오. 수렴하지 않으면 그이유를 설명하시오.

4 (20점) $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^3$ 에 대하여,

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{x}), \qquad g(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{x})$$

로 정의된 두 선형사상 $f, g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ 가 같은 사상이면, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ 임을 보이시오

5 (20점) 사이클로이드 $X(t) = (t - \sin t,\ 1 - \cos t),\ 0 \le t \le 2\pi$ 의 밀도함수가 $\mu(t) = |\pi - t|$ 로 주어졌을때, 질량중심을 구하시오.

6 (각각 10점씩, 총20점)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^4}{x^2+y^2} & \text{if } (x,y) \ne (0,0) \\ 0 & \text{if } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) 다음 등식이 성립하는지를 판정하시오.

$$D_1 f(0,0) + D_2 f(0,0) = D_{(1,1)} f(0,0)$$

(b) f 의 $(0,0)$ 에서 연속성을 판정하시오.

7 (20점) $x^3 + y^3 - z^3 = 3$ 일때, $x^2 + y^2 + z^2$ 의 최댓값, 최솟값이 존재하면 구하시오.

8 (20점) $\mathbf{R}^3$ 의 영역 $z(x^2+y^2) \le (x^2+y^2)^2 \le z(2x^2+y^2),\ 0 \le z \le 2,\ x^2+y^2 \ne 0$ 의 부피를 구하시오.

9 (각각 10점씩, 총20점) (a) 곡선 $X(t) = (\cos t,\ \sin t,\ t),\ 0 \le t \le 2\pi$ 와 벡터장

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2} + 2xyz\sin(x^2yz),\ \frac{x}{x^2+y^2} + x^2z\sin(x^2yz),\ x^2y\sin(x^2yz)\right)$$

에 대하여 $\int_X \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ 의 값을 구하시오.

(b) $\mathbf{R}^2$ 의 영역 $D:\ 1 \le x^2 + y^2 \le 4$ 와 벡터장

$$\mathbf{G}(x,y) = \left(-ye^{x^2+y^2},\ xe^{x^2+y^2}\right)$$

에 대하여 $\iint_D \operatorname{rot} \mathbf{G}\, dV_2$ 의 값을 구하시오.

10 (각각 10점씩, 총20점) (a) $\mathbf{R}^3$ 의 영역 $R:\ x^2 + y^2 \le 2 - z^2,\ 0 \le z \le 1$ 과 벡터장

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(yze^{x^2+y^2},\ -xze^{x^2+y^2},\ z^2\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

에 대하여 $\iint_{\partial R} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ 의 값을 구하시오.

(b) 곡면 $S:\ x^2 + y^2 = 2\pi + z,\ -\pi \le z \le \pi$ 와 벡터장 $\mathbf{G}(x,y,z) = \left(z\sin(x^2+y^2),\ x,\ x^6yz^5\right)$ 에 대하여 $\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S}$ 를 구하시오. 단, S 의 향을 정하는 단위벡터 $\mathbf{n}$ 은 $(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}, 0)$ 에서 $\mathbf{n} \cdot (0,0,1) < 0$ 이다.