2011년 1월 TA 자격시험: 미적분학

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오(총점 200점).

1 (5점씩, 총15점) 다음 급수가 수렴하는지를 판정하시오.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(n-7)e^{\frac{1}{n}}\sin\frac{1}{n}\tan\frac{1}{n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^{-n^2}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan n\right)$

2 (20점) 다음 무한급수의 합을 구하시오.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

3 ((a)5점, (b)20점) (a) $f(x)=\sin(e^x)$ 의 $x=0$ 에서 2차 근사다항식을 구하시오.

(b) 다음 적분의 근사값을 오차가 $\frac{1}{5000}$ 을 넘지 않도록 구하시오. (Hint : 근사값을 무리수로 구해도 좋다.)

$$\int_{-1}^{0}\sin(e^x)\,dx$$

4 (20점) 두 사상 $f,g:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^3$ 가 다음과 같이 정의되어 있다. f 와 g 가 선형사상인지를 판별하고, 선형사상이면 대응하는 행렬을 구하시오.

$$f(a,b)=((a,b,1)\times(a,b,2))\times(1,1,1) \qquad g(a,b)=(a,b,1)\times((a,b,2)\times(1,1,1))$$

5 (20점) x,y-평면상의 곡선 X 는 다음 영역의 경계이다.

$$x^2+y^2\le 1,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0$$

이 곡선의 밀도함수가 $(0,0)$ 으로 부터 거리에 비례할때, 이 곡선의 무게중심의 좌표를 구하시오.

6 (10점씩, 총20점)

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2-y} & \text{if } x^2\ne y\\ 0 & \text{if } x^2=y\end{cases}$$

(a) $\mathbf{v}=(a,b)$ 일때 $D_{\mathbf{v}}f(0,0)$ 을 구하시오.

(b) f 의 $(0,0)$ 에서 연속성을 판정하시오. (Hint : $y=x^2\sin^2\frac{1}{x}$)

7 (20점) $x^2+y^2=1+z^2$, $-1\le z\le 1$ 일때, $x+y^2+z^2$ 의 최댓값, 최솟값이 존재하면 구하시오.

8 (20점) 다음 영역의 부피를 구하시오.

$$x^2+y^2\le 1+z^2,\qquad -\sqrt{3}\le z\le\sqrt{3},\qquad x^2+y^2+z^2\ge 2$$

9 (10점) 곡선 $X(t)=\left(\sqrt{t^2+1}\cos(2t),\ \sqrt{t^2+1}\sin(2t),\ t\right)$, $0\le t\le\pi$ 와 벡터장

$$\mathbf{F}(x,y,z)=\left(\frac{-y}{x^2+y^2}+2xz^2,\ \frac{x}{x^2+y^2},\ 2x^2z+1\right)$$

에 대하여 $\int_X\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ 를 구하시오.

10 (15점씩, 총30점) (a) $R=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+2z\le 2,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\}$ 이고

$$\mathbf{G}(x,y,z)=xyz\left(1+\sin((x^2+y^2+2z)\pi)\right)(x,y,z)$$

일때, $\iiint_R \operatorname{div}\mathbf{G}\,dV$ 를 구하시오.

(b) $S=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+2z=2,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\}$ 이고

$$\mathbf{H}(x,y,z)=(-y,x,z^2)+e^{xyz}(yz,zx,xy)$$

일때, $\int_{\partial S}\mathbf{H}\cdot d\mathbf{s}$ 를 구하시오. (단, ∂S 의 향은 xy 평면으로 정사영 했을때 반시계 방향이다.)