2012년 7월 TA 자격시험: 미적분학

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오(총점 200점).

1 (각각 5점씩, 총15점) 다음 급수가 수렴하는지를 판정하시오.

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n^2\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sinh\frac{1}{n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan n\right)$

2 (20점) 다음 무한급수의 값을 구하시오.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\pi^{2n+4}}{(n+2)((2n+1)!)}$$

3 (20점) 다음 적분의 근삿값을 오차가 10^{-5} 을 넘지않도록 구하시오.

$$\int_1^{1.01}\arctan(x^2)\,dx$$

4 (15점) $\mathbf{R}^3$ 의 일차독립인 두 벡터 $\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\mathbf{b}=(b_1,b_2,b_3)$ 에 대하여

$$\widetilde{x}\mathbf{a}+\widetilde{y}\mathbf{b}+\widetilde{z}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=(x,y,z)$$

일때, $f(x,y,z)=(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z})$ 로 정의하는 사상 $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ 가 선형사상임을 보이고, 대응하는 행렬의 역행렬을 구하시오.

5 (20점) $\mathbf{R}^2$ 의 곡선 $\{(x,y)\mid x^2+(y-1)^2=1\}\cup\{(x,y)\mid x^2+(y-2)^2=4\}$ 의 밀도함수가 y 에 비례할때, 질량중심을 구하시오.

6 (20점) 다음 함수 $f(x,y)$ 의 $(0,0)$ 에서 연속성과 미분 가능성을 판정하시오.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3+y^2}{x^2+|y|} & \text{if } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{if } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

7 (20점) $x^2y+2xy^2+x^3+\frac{1}{9}y^3=1,\ x\geq 0,\ y\geq 0$ 일때, $3x+y$ 의 최댓값, 최솟값이 존재하면 구하시오.

8 (20점) $\mathbf{R}^3$ 에서 다음 부등식으로 주어진 영역의 밀도함수가 $\mu(x,y,z)=|z|$ 일 때 질량을 구하시오.

$$2\leq x^2+y^2+z^2\leq 3,\quad x^2+y^2\leq 1+|z|$$

9 (각각 10점씩, 총20점) (a) 곡선 $X(t)=((\pi-t)\cos t,\ (\pi-t)\sin t,\ e^{\sin t}),\ 0\leq t\leq\frac{3}{4}\pi$ 와 벡터장

$$\mathbf{F}(x,y,z)=\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{-y}{x^2+y^2},\ \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{x}{x^2+y^2},\ \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

에 대하여 $\int_X\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ 의 값을 구하시오.

(b) $\mathbf{R}^2$ 의 영역 $D=\{(x,y)\mid x^2-2\leq y\leq 2,\ x^2+y^2\geq 1\}$ 와 벡터장

$$\mathbf{G}(x,y)=\big(y\sin(xy)+y^2+\tan(e^x),\ \ x\sin(xy)+3xy+\arctan y\big)$$

에 대하여 $\int_{\partial D}\mathbf{G}\cdot d\mathbf{s}$ 의 값을 구하시오.

10 (각각 15점씩, 총30점) (a) $\mathbf{R}^3$ 의 영역 $R:\ x^2+y^2-2\leq z\leq 2,\ x^2+y^2+z^2\geq 1$ 과 벡터장

$$\mathbf{F}(x,y,z)=\big(x^3+e^z\sin(y^2z),\ \ y^2z+e^x\sin(z^2x),\ \ -z^2y+e^y\sin(x^2y)\big)$$

에 대하여 $\iint_{\partial R}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ 의 값을 구하시오.

(b) 곡면 $S:\ z=10-x^2-y^2,\ x^2-2\leq y\leq 2,\ x^2+y^2\geq 1$ 와 벡터장

$$\mathbf{H}(x,y,z)=(y-x^2+2)\big(z-9,\ z-9,\ (z+x^2-6)\cos y\big)$$

에 대하여 $\iint_S\operatorname{curl}\mathbf{H}\cdot d\mathbf{S}$ 를 구하시오. 단, S 의 향을 정하는 단위벡터 $\mathbf{n}$ 은 $(1,1,8)$ 에서 $\mathbf{n}\cdot(0,0,1)\leq 0$ 이다.