2012년 1월 TA 자격시험: 미적분학

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오(총점 200점).

1 (각각 5점씩, 총15점) 다음 급수가 수렴하는지를 판정하시오.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{n}} \sin \frac{27}{n}$ (b) $\sum_{n=23}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{\log(n-21)}}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{n\pi}{2}\right) \left(\frac{1}{\arctan \sqrt{n}} - \frac{2}{\pi}\right)$

2 (25점) 다음 무한급수의 값을 구하시오.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3n+2} \left(-\frac{1}{2}\right)^{3n+2}$$

3 (20점) 함수 $f(x) = \sin\sqrt{x}$ 의 $x = \frac{\pi^2}{9}$ 에서 2차 근사다항식 $P(x)$ 를 구하고, 구간 $[1, \frac{10}{9}]$ 에서

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{1}{5000}$$

임을 보이시오. (단, $\pi^2 \approx 9.8696$ 이다.)

4 (20점) $\mathbf{e}_1 = (1,0,0),\ \mathbf{e}_2 = (0,1,0),\ \mathbf{e}_3 = (0,0,1) \in \mathbf{R}^3$ 에 대하여, 다음과 같이 정의된 변환 $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ 가 선형사상임을 보이고, 대응하는 행렬을 구하시오.

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i<j} \left(\sum_{k=1}^{3} (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) \times (\mathbf{e}_k \times \mathbf{x}) \right)$$

5 (20점) $\mathbf{R}^3$ 의 곡선 $X(t) = (\cos t,\ \sin t,\ t),\ 0 \leq t \leq 2\pi$ 의 밀도함수가 원점으로 부터 거리의 제곱에 비례할 때, 질량중심을 구하시오.

6 (20점) 다음 함수 $f(x,y)$ 의 $(0,0)$ 에서 연속성과 미분 가능성을 판정하시오.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x^2+|y|} & \text{if } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{if } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

7 (20점) $x^3 + 2y^3 + 3xy = \frac{11}{4},\ x \geq 0$ 일때, $x + y^2$ 의 최댓값, 최솟값이 존재하면 구하시오.

8 (20점) $\mathbf{R}^3$ 의 영역 $0 \leq z \leq 2,\ x^2+y^2 \leq 2,\ x^2+y^2+z \leq 2x$ 의 부피를 구하시오.

9 (각각 10점씩, 총20점) (a) 곡선 $X(t) = (t - \sin t,\ 1 - \cos t,\ t+1),\ \ 0 \leq t \leq 2\pi$ 와 벡터장

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{-y}{x^2+y^2},\ \ \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{x}{x^2+y^2},\ \ \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

에 대하여 $\int_X \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ 의 값을 구하시오.

(b) $\mathbf{R}^2$ 의 영역 $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1,\ y \geq 0\}$ 와 벡터장

$$\mathbf{G}(x,y) = \left(x \sin(xy) + y^2 x + e^{\sin y},\ \ -y\sin(xy) + xy + e^{\sin x}\right)$$

에 대하여 $\int_{\partial D} \mathbf{G} \cdot \mathbf{n}\, ds$ 의 값을 구하시오. 단, $\mathbf{n}$ 은 영역의 외부를 향하는 수직인 단위벡터이다.

10 (각각 10점씩, 총20점) (a) $\mathbf{R}^3$ 의 영역 $R:\ x^2+y^2 \leq 2,\ -2 \leq z \leq 2,\ x^2+y^2+z^2 \geq 1$ 과 벡터장

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(xz^2 + xe^z \sin(xy),\ \ yz^2 - ye^z \sin(xy),\ \ z^2 + e^{xy}\right)$$

에 대하여 $\iint_{\partial R} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ 의 값을 구하시오.

(b) 곡면 $S:\ z = 3 - x^2 - y^2,\ 0 \leq z \leq 2$ 와 벡터장 $\mathbf{H}(x,y,z) = \left((yz + e^{xz})z^3,\ x^3 \sin(2\pi z),\ y^2 \cos^2(2\pi z)\right)$ 에 대하여 $\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S}$ 를 구하시오. 단, S 의 향을 정하는 단위벡터 $\mathbf{n}$ 은 $(1,1,1)$ 에서 $\mathbf{n} \cdot (0,0,1) < 0$ 이다.