2013년 1월 TA 자격시험: 미적분학

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오(총점 200점).

1 ((a)와(b)는 5점씩, (c)는 10점) 다음 급수가 수렴하는지를 판정하시오.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}\right)$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sin\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - n\sin\frac{1}{n}\right)$

2 (20점) 다음 무한급수의 값을 구하시오.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+4)} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+2}$$

3 (20점) $f(x) = \log x$ 의 $x = e$ 에서 2차 근사다항식 $P(x)$ 를 구하고 $|f(3) - P(3)| \le \frac{1}{1000}$ 임을 보이시오.

4 (20점) $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3),\ \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbf{R}^3$ 에 대하여, $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ 를

$$f(\mathbf{x}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{x}) \times \mathbf{b}$$

로 정의할때, f 가 선형사상임을 보이고 f 에 대응하는 행렬이 역행렬을 가지는지를 판정하시오.

5 (20점) $\mathbf{R}^3$ 의 곡선 $X(t) = (t\sin t,\ t\cos t,\ 2t)$ 위의 점 $(0,0,0)$ 에서 곡률과 접촉원의 중심을 구하시오.

6 (20점) 다음 함수 $f(x,y)$ 의 $(0,0)$ 에서 연속성과 미분 가능성을 판정하시오.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\arctan(x^2 y)}{x^2+y^2} & \text{if } (x,y) \ne (0,0) \\ 0 & \text{if } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

7 (20점) $x^3 + y^3 + 6xy = 8$ 일때, $x^2 + y^2$ 의 최댓값, 최솟값이 존재하면 구하시오.

8 (20점) $\mathbf{R}^3$ 에서 다음 부등식으로 주어진 영역의 부피를 구하시오.

$$2\sqrt{x^2+y^2} + x \le x^2 + y^2 \le 9 - z^2$$

9 (각각 10점씩, 총20점) (a) 곡선 $X(t) = (\,\pi\cos t,\ t,\ e^{\sin t}\,),\ 0 \le t \le \pi$ 와 벡터장

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(2xy + \frac{-y}{x^2+y^2},\ \ x^2 + ze^{yz} + \frac{x}{x^2+y^2},\ \ ye^{yz}\right)$$

에 대하여 $\int_X \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ 의 값을 구하시오.

(b) $\mathbf{R}^2$ 의 영역 $D = \{\,(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1 \le 4x^2 + 4y^2\,\}$ 와 벡터장

$$\mathbf{G}(x,y) = \left(xy^2 + e^y + \sin(y^2),\ \ e^x + \sin(x^2)\right)$$

에 대하여 $\int_{\partial D} \mathbf{G} \cdot \mathbf{n}\, ds$ 의 값을 구하시오. 단, $\mathbf{n}$ 은 영역의 외부를 향하는 수직인 단위벡터이다.

10 (각각 10점씩, 총20점) (a) 구면좌표계로 주어진 $\mathbf{R}^3$ 의 영역 $R:\ 1 + \cos\phi \le \rho \le \sqrt{5}$ 과 벡터장

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(x + \sin(yz^2),\ \ zx^2 + \sin(xz^2),\ \ x^2y + \sin(xy^2)\right)$$

에 대하여 $\iint_{\partial R} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ 의 값을 구하시오. 단, ∂R 의 향은 R 이 아닌 쪽을 향하고 있다.

(b) $\mathbf{R}^3$ 의 곡면

$$S:\ z = \frac{1}{x^2+y^2}, \qquad \frac{1}{4} \le x^2 + y^2 \le 4$$

와 벡터장

$$\mathbf{H}(x,y,z) = (z-4)(4z-1)\left(x^2y + \sin x,\ y^2z + \cos y,\ z^2x + \cos z\right) + (z-4)(-y,x,z)$$

에 대하여 $\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S}$ 를 구하시오.
단, S 의 향을 정하는 단위벡터 $\mathbf{n}$ 은 $(1,1,\frac{1}{2})$ 에서 $\mathbf{n} \cdot (0,0,1) > 0$ 이다.